Série d'exercices n° 1

Exercice 1

Soit $G =]-1;1[$. On munit G de la loi suivante

$$\forall x, y \in G \qquad x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.

Exercice 2

Soit $(G, *)$ un groupe tel que $x * x = e, \forall x \in G$. Montrer que le groupe G est commutatif.

Exercice 3

Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si

$$\exists! n \in \mathbb{N} \qquad H = n\mathbb{Z}$$

Exercice 4

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la loi de composition

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 5

Soit $(G, *)$ un groupe non-abélien. On note e son élément neutre, et x^{-1} le symétrique de x dans $(G, *)$.

1. Pour tout $a \in G$, on définit l'application $f_a : (G, *) \to (G, *)$ par

$$f_a(x) = a * x * a^{-1}$$

   Montrer que f_a est un morphisme de groupes. f_a est-il injectif ? surjectif ?

2. Soit $F = \{f_a \mid a \in G\}$, muni de la loi de composition $\circ$.
   a. Montrer que $f_a \circ f_b = f_{a*b}$, pour tout $(f_a, f_b) \in F^2$.
   b. Montrer que $(F, \circ)$ est un groupe.

Exercice 6

Soit $(G, *)$ un groupe cyclique engendré par x, d'ordre $|G| = m \in \mathbb{N}^*$. On note e son élément neutre.

1. Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \ : \ x^k = e\}$ est non-vide.
2. On note $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \ : \ x^k = e\}$, et on pose

$$A = \{x^k \ : \ 0 \leq k \leq p-1\}$$

Montrer que $\text{card}(A) = p$.

3. Montrer que $A = G$. En déduire que $m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \ : \ x^k = e\}$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que x^k est générateur de G si et seulement si m et k sont premiers entre eux.

Exercice 7 **(Groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**

On se fixe un $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est **congru à b modulo n**, et on écrit $a \equiv b[n]$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b - a = kn$.

1. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence. Déterminer les classes d'équivalence associées.
2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble de ces classes d'équivalence. On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la loi

$$\overline{a} + \overline{b} = \{x + y \ : x \in \overline{a} \text{ et } y \in \overline{b}\}$$

Montrer que $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$, $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En déduire que $+$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique et déterminer son générateur.

Remarque : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est appelé le groupe quotient de $\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$.

Exercice 8

Soit f un homomorphisme d'un groupe fini $(G, *)$ dans un groupe $(H, \perp)$.

1. On définit la relation

$$x\mathfrak{R}y \ \Leftrightarrow \ \text{sym}(x) * y \in \ker(f), \qquad \forall x, y \in G.$$

Montrer que $x\mathfrak{R}y \ \Leftrightarrow \ f(x) = f(y)$. En déduire que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur G.

2. Soient $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ les classes d'équivalence associées à $\mathfrak{R}$, où $x_1, \ldots, x_n \in G$ sont deux à deux distincts. Alors le quotient de l'ensemble G par la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ s'écrit

$$G/\mathfrak{R} = \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$$

Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : G/\mathfrak{R} &\to \text{Im}(f) \\ \overline{x}_i &\mapsto f(x_i) \end{aligned}$$

Vérifier que φ est bijective.

3. On considère l'application

$$\begin{aligned} \psi : G/\mathfrak{R} \times \ker(f) &\to G \\ (\overline{x}_i, y) &\mapsto x_i * y \end{aligned}$$

Montrer que ψ est bijective.

4. En déduire que

$$\text{card}(G) = \text{card}(\ker(f)) \times \text{card}(\text{Im}(f))$$